Cours de mathématiques P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

Suites de fonctions

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On définit $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

I. Convergence simple et convergence uniforme

I.1. Convergence simple

Définition :

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I si $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Remarque :

Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions, on fixe $x \in I$ et on étudie la suite de scalaires $(f_n(x))$.
La convergence simple est une convergence ponctuelle.

Remarque :

(f_n) converge simplement $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Définition :

Si (f_n) converge simplement vers f sur I, on dit que f est limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur I.

Propriété :

Si elle existe, la limite simple de (f_n) sur I est unique.

Propriété :

Si J est un sous-intervalle de I et si (f_n) converge simplement sur I, alors (f_n) converge simplement sur J.

Proposition :

Soient (f_n) et $(g_n) \in \left(\mathscr{F}(I, \mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$ telles que (f_n) converge simplement vers f sur I et (g_n) converge simplement vers g sur I. Alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur I.

Proposition :

Soient $(f_n) \in \left(\mathscr{F}(I, \mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$, telles que (f_n) converge simplement vers f sur I.

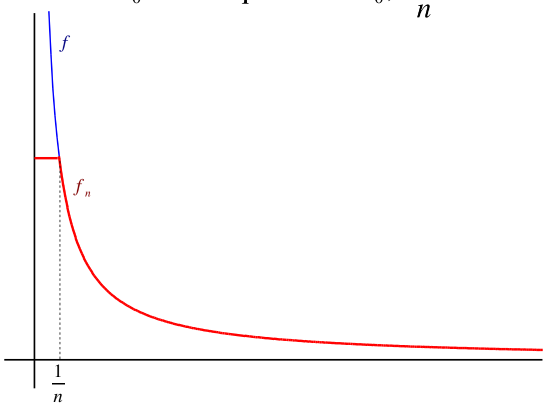
1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I, alors f est croissante sur I.
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante sur I, alors f est décroissante sur I.
3. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe sur I, alors f est convexe sur I.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est concave sur I, alors f est concave sur I.

Exemple :

Si $I =]0, +\infty[$, $n \geqslant 1$, et $f_n = \begin{cases} n \text{ si } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$. Soit $x \in I$, $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{1}{n} < x$.

C'est-à-dire $\forall n \geqslant n_0$, $f_n(x) = \frac{1}{x}$, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$.

Soit $\forall x > 0$, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. (f_n) converge simplement vers f sur I.



1.2. Convergence uniforme

Définition :

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I si $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n>N,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Remarque :

Ce rang N ne dépend que de ε : il est uniforme en x.

Définition :

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, on dit que f est limite uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur I.

Proposition :

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement sur I. La réciproque est fausse.

1.3. Caractérisation de la convergence uniforme

Théorème :

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $I \Leftrightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0$, f_n-f est bornée et $\|f_n(x)-f(x)\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Preuve :

$\Rightarrow$: (f_n) converge uniformément vers f sur I donc $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
On prend $\varepsilon=1$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<1$: ainsi $\forall n\geqslant n_0,\ f_n-f$ est bornée.
Soit $\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Ainsi par passage au sup à gauche on a $\forall n\geqslant N,\ \|f_n-f\|_{\infty,I}\leqslant\varepsilon$. Donc $\|f_n-f\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

$\Leftarrow$: Si $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ f_n-f$ est bornée, alors $(\|f_n-f\|_{\infty,I})$ est définie pour $n\geqslant n_0$. De plus, cette suite converge vers 0 donc pour $\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \|f_n-f\|_{\infty,I}<\varepsilon \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
Il y a donc convergence uniforme de (f_n) vers f sur I.

Corollaire :

Si $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est bornée sur I et si f est bornée sur I, alors :
(f_n) converge uniformément vers f sur $I \Leftrightarrow (f_n)$ converge vers f au sens de $\|\ \|_{\infty,I}$.
Si on munit $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ de $\|\ \|_{\infty,I}$, (f_n) converge vers f au sens de $\|\ \|_{\infty,I} \Leftrightarrow \|f_n-f\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Théorème :

(f_n) converge uniformément vers f sur $I \Leftrightarrow \exists(\alpha_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que
- $\forall n>n_0,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\alpha_n$
- $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Preuve :

$\Rightarrow$: D'après le théorème précédent, $\exists n_0\geqslant 1$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ f_n-f$ est bornée. On pose $\alpha_n=\begin{cases}0 \text{ si } n\in[\![0,n_0-1]\!]\\ \|f_n-f\|_{\infty,I} \text{ si } n\geqslant n_0\end{cases}$
Par construction, $\forall n\geqslant n_0,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\|f_n-f\|_{\infty,I}=\alpha_n$, or $\|f_n-f\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$ d'après le théorème précédent. Donc $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\to}0$.

$\Leftarrow$: Si $\exists(\alpha_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant n_0,\ \ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\alpha_n$ et $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, alors $\forall n\geqslant n_0$,
Alors $\forall n\geqslant n_0,\ 0\leqslant\|f_n-f\|_{\infty,I}\leqslant\alpha_n$. Ainsi par encadrement, $\|f_n-f\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$.
Donc par théorème, (f_n) converge uniformément vers f sur I.

Proposition :

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors $\forall (x_n)\in I^{\mathbb{N}}$, la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))$ converge vers 0.

Preuve :

Par théorème, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0$, f_n-f est bornée et $\|f_n-f\|_{\infty,I}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Alors $\forall x_n\in I$, $0\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|\leqslant\|f_n-f\|_{\infty,I}$, et donc par théorème d'encadrement, $f_n(x_n)-f(x_n)\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Théorème :

Si $\exists (x_n)\in I^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n)-f(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I.

1.4. Convergence uniforme locale

Définition :

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément localement vers f sur I si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I.

Proposition :

La convergence uniforme locale implique la convergence simple.

Preuve :

Soit $x_0\in I$. On suppose que (f_n) converge uniformément localement vers f sur I, c'est-à-dire que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I. Or $x_0\in I$ donc il existe un segment J inclus dans I tel que $x_0\in J$. (f_n) converge uniformément vers f sur J, donc (f_n) converge simplement vers f sur J.

Ainsi $f_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}f(x_0)$, ce qui implique que (f_n) converge simplement vers f sur I.

Proposition :

La convergence uniforme implique la convergence uniforme locale.

Preuve :

Soit $J\subset I$. $0\leqslant\|f_n-f\|_{\infty,J}\leqslant\|f_n-f\|_{\infty,I}$, donc par encadrement $\|f_n-f\|_{\infty,J}\underset{n\to\infty}{\to}0$ et f_n-f est bornée sur J.

Ainsi par théorème, (f_n) converge uniformément vers f sur J, ce qui implique que (f_n) converge unifomément localement vers f sur I.

Remarque :

La convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I.

1.5. Plan d'étude des convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions

On veut étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n) sur I.

1. Convergence simple : On fixe $x\in I$ et on étudie la suite $(f_n(x))$. On détermine alors la limite simple f et le domaine de convergence simple.
2. Convergence uniforme : (f_n) converge simplement vers f sur I, on forme alors $\varphi_n=f_n-f$.
   - Si le calcul est simple, on détermine $\|\varphi_n\|_{\infty,I}$. On sait alors par théorème si il y a convergence uniforme.
   - Sinon, on cherche une suite (α_n) de réels positifs ne dépendant pas de x telle que $\forall x\in I$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\alpha_n$ et $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, on a alors la convergence uniforme par théorème.
   - Si on pense qu'il n'y a pas convergence uniforme sur I, on peut chercher une suite (x_n) d'élements de I telle que $f_n(x_n)-f(x_n)\underset{n\to\infty}{\nrightarrow}0$: il n'y a alors pas convergence uniforme sur I, on cherche alors les sous-intervalles de I sur lesquels il y a convergence uniforme.

2. Propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions

2.1. Continuité et limite

Proposition :

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, et que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction bornée sur I, alors f est bornée sur I.

Preuve :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Donc pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.

Ainsi $\forall x \in I$, $\big||f(x)| - |f_{n_0}(x)|\big| \leqslant 1$ (deuxième inégalité triangulaire), donc $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant 1 + |f_{n_0}(x)|$

f_{n_0} est bornée sur I $\Rightarrow$ $\exists M_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I$, $|f_{n_0}| \leqslant M_0$ $\Rightarrow$ $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant 1 + M_0$, f est donc bornée sur I.

Corollaire :

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction bornée sur I et que f n'est pas bornée sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

Théorème de continuité en un point pour les suites de fonctions :

Soit $a \in I$, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, et que (f_n) converge uniformément vers f sur I. Alors f est continue en a.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. (f_n) converge uniformément vers f sur I, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

f_N est continue en a : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$, $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Soit $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(a)) + (f_N(a) - f(a))| \\ &\leqslant \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi f est continue en a.

Théorème de continuité pour les suites de fonctions :

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et que (f_n) converge uniformément vers f sur I. Alors f est continue sur I.

Corollaire :

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et que (f_n) converge uniformément localement vers f sur I. Alors f est continue sur I.

Preuve du corollaire :

D'après le théorème de continuité, f est continue sur tout segment J inclus dans I. Soit $x_0 \in I$.

Il existe un segment J tel que $x_0 \in J$, donc f est continue en x_0, ce qui implique que f est continue sur I.

Remarque :

La continuité sur I est une notion ponctuelle, alors que la converge uniforme est une notion globale.

Corollaire :

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $a \in I$ et si f n'est pas continue en a, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

Théorème de la double limite ou d'interversion des limites :

> Soit $a\in I\cup\{\text{bornes de } I \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}\}$, on suppose que $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ admet une limite finie l_n en a et que (f_n) converge uniformément vers f sur I. Alors (l_n) converge et si $l=\lim\limits_{n\to\infty} l_n$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et vaut l.

Preuve :

Soit $\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $p\in\mathbb{N},\ n\geqslant N$, et $x\in I$. $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|f_{n+p}(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|$

Or, $|f_{n+p}(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ et $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$, donc $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}$.

Comme $f_{n+p}(x)-f_n(x)\underset{x\to a}{\to}l_{n+p}-l_n$, par passage à la limite ($x\to a$) on a $\forall n\geqslant N,\ \forall p\in\mathbb{N},\ |l_{n+p}-l_n|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$.

Ainsi (l_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, elle est donc convergente. On note l sa limite.

On étudie ici le cas où $a\in\mathbb{R}$. $\exists N'\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N',\ |l_n-l|<\frac{\varepsilon}{3}$. Soit $n_0=\max(N,N')$.

$\lim\limits_{x\to a} f_{n_0}(x)=l_{n_0}\ \Rightarrow\ \exists\alpha>0$ tel que $\forall x\in]a-\alpha,a+\alpha[\cap I,\ |f_{n_0}(x)-l_{n_0}|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $x\in]a-\alpha,a+\alpha[\cap I$, $|f(x)-l|\ \leqslant\ \underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{|f_{n_0}(x)-l_{n_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{|l_{n_0}-l|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\ <\ \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right]$.

2.2. Échange limite-intégrale

Théorème d'échange limite-intégrale pour la convergence uniforme sur un segment :

> On suppose que $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est continue sur $I=[a,b]$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
> Alors f est continue sur $[a,b]$ et $\int_a^b f_n\underset{n\to\infty}{\to}\int_a^b f$.

Preuve :

f est continue par théorème de continuité.

$\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|=\left|\int_a^b f_n-f\right|\leqslant\left|\int_a^b\|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}\right|=(b-a)\|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}$, or $\|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}\underset{n\to\infty}{\to}0$ car (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc par encadrement, $\int_a^b f_n-\int_a^b f\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Théorème de primitivation pour les suites de fonctions :

> Soit $a\in I$. On suppose que $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est continue sur I (I intervalle quelconque), et que (f_n) converge uniformément localement vers f sur I.
> On peut alors poser $F_n\ :\ x\mapsto\int_a^x f_n(t)dt$ et $F\ :\ x\mapsto\int_a^x f(t)dt$, bien définies d'après le théorème de continuité.
> Alors (F_n) converge uniformément localement (et donc simplement) vers F sur I.

Preuve :

Convergence simple de (F_n) vers F sur I : Soit $x\in I$. Sur le segment $[a,x]$, chaque f_n est continue et (f_n) converge uniformément sur $[a,x]$. Par théorème d'échange, $\int_a^x f_n\underset{n\to\infty}{\to}\int_a^x$, c'est-à-dire $F_n\underset{n\to\infty}{\to}F$.

Convergence uniforme locale de (F_n) vers F sur I : Soit $[\alpha,\beta]\subset I$. On pose $c=\min(a,\alpha)$ et $d=\max(a,\beta)$.
Alors $[c,d]\subset I$, $[\alpha,\beta]\subset[c,d]$, et $a\in[c,d]$. Donc $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $[a,x]\subset[c,d]$.

Soit $x\in[\alpha,\beta]$. $|F_n(x)-F(x)|=\left|\int_a^x(f_n(t)-f(t))dt\right|\ \leqslant\ \int_a^x|f_n(t)-f(t)|dt\ \leqslant\ \int_c^d|f_n(t)-f(t)|dt$

$$\leqslant\ \int_c^d\|f_n-f\|_{\infty,[c,d]}=(d-c)\|f_n-f\|_{\infty,[c,d]}\underset{n\to\infty}{\to}0 \text{ sans dépendre de } x.$$

Ainsi par théorème, (F_n) converge uniformément vers F sur $[\alpha,\beta]$, donc converge uniformément localement vers F sur I.

2.3. Théorème de dérivation pour les suites de fonctions

Théorème :

Soient $f_n : I \to \mathbb{K}$, $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, que (f_n) converge simplement vers f sur I, et que (f_n') converge uniformément localement vers g sur I.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $f' = g$ et (f_n) converge uniformément localement vers f sur I.

Preuve :

Soit $a \in I$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$. On note $\phi_n(x) = \int_a^x f_n'(t)\,dt$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n' est continue sur I et (f_n') converge uniformément localement vers g sur I, donc par théorème, g est continue sur I. On peut donc poser $\phi(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Par théorème de primitivation, (ϕ_n) converge simplement vers ϕ sur I, et (ϕ_n) converge uniformément localement vers ϕ sur I.
Par ailleurs, (f_n) converge simplement vers f sur I, donc $f_n(a) \underset{n\to\infty}{\to} f(a)$, et $\forall x \in I$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$.
Soit $x \in I$. Par passage à la limite dans la première expression de $f_n(x)$, on a $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$.
g étant continue sur I, ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = \phi' = g$.
Comme (ϕ_n) converge uniformément localement vers ϕ sur I et que $f_n(a)$ converge vers $f(a)$, on a $(f_n) = (f_n(a) + \phi_n)$ converge uniformément localement vers $f(a) + \phi = f$ sur I.

Corollaire :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $g_k : I \to \mathbb{K}$. On pose enfin $g_0 = f$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge simplement vers g_n sur I, et que $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge uniformément localement vers g_p sur I.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$, et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément localement vers g_k sur I.

Preuve :

Récurrence sur p : On note H_p l'assertion du corollaire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- $p = 1$: H_1 est vrai d'après le théorème.
- On suppose que H_p est vaie pour $p \in \mathbb{N}^*$. Soient alors $f_n : I \to \mathbb{K}$, et $f : I \to \mathbb{K}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur I. On suppose qu'il existe $g_1, \ldots, g_{p+1} : I \to \mathbb{K}$ telles que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge simplement vers g_k sur I et que $f_n^{(p+1)}$ converge uniformément localement vers g_{p+1} sur I.
  Notons $h_n = f_n^{(p)}$. h_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, (h_n) converge simplement vers g_p sur I, et h_n' converge uniformément localement vers g_{p+1} sur I. Par théorème de dérivation, g_p est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $g_p' = g_{p+1}$, et h_n converge uniformément localement vers g_p sur I.
  Or H_p est vraie et la suite (f_n) vérifie les conditions de (H_p), ainsi f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, $f^{(k)} = g_k$, et $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément localement vers g_k sur I. De plus, $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $\left(f^{(p)}\right)' = g_{p+1}$.
  Donc f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur I, $f^{(p+1)} = g_{p+1}$, et $\forall k \in [\![0, p+1]\!]$, $f_n^{(k)}$ converge uniformément localement vers g_k sur I. Ainsi H_{p+1} est vraie.

Par récurrence H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

* * * * *